Facultés de Technologies Industrielles (TIN),
et Formation En Emploi (FEE)
Filières microtechniques et électronique et automatisation industrielle (MI et EAI)
LaRA - Laboratoire de Robotique et Automatisation

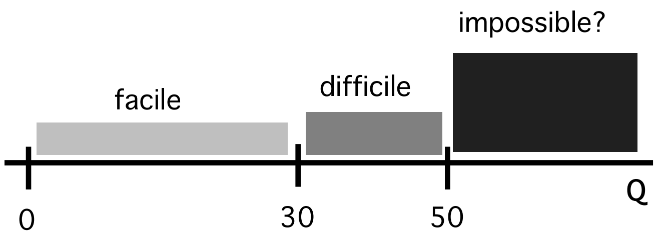
CONCEPTION DE LA MECANIQUE D'UN BRAS

(CONCEPTION D'UNE CHAINE CINEMATIQUE)

(Partie **4.2** du cours “Robotique et Automatisation”)

Jean-Daniel Dessimoz

$$f = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\text{accélération}}{\text{erreur max. admissible}}} \qquad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_{\text{entraînement}}}{I_{\text{charge utile}}}}$$



Yverdon-les-Bains, 29 novembre 2016

CONCEPTION DE LA MECANIQUE D'UN BRAS

TABLE DES MATIERES

CONCEPTION DE LA MECANIQUE D'UN BRAS

RESUME

La précision d'un bras manipulateur est limitée par bien des facteurs : fréquence propre, jeux, coincements, caractéristiques de frottement (broutage, stick-slip), loi de commande, etc.

La *fréquence propre* joue un rôle particulièrement important. Directement liée à la mécanique du bras, elle est au centre de cette partie du cours.

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M}} \quad \text{ou, en cas de rotation,} \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_\alpha}{J}}$$

On constate que la fréquence propre est liée aux *raideurs*, linéaires ou angulaires, ainsi qu'aux *masses et inerties*.

L'expérience et les *lois de similitude* indiquent qu'il est simple d'obtenir une fréquence élevée, et donc une bonne précision, si les dimensions du bras sont faibles.

Pour juger de la *qualité* d'un robot, il est utile de tenir compte tout à la fois de la fréquence propre et des dimensions du robot.

$Q = f \cdot l$ où l est la *"portée"* du robot.

Afin de construire de manière systématique un robot, une *méthode* a été définie à l'EPFL. L'essentiel tient en trois points :

1. Établir le cahier des charges : charge utile, précision, (*erreur maximale admissible*), caractéristiques dynamiques (vitesse maximum, *accélération*), ... Il en découle en particulier la fréquence propre à viser, qui est à peu près la suivante (cas où 3 articulations sont couplées):

$$f = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\text{accélération}}{\text{erreur max. admissible}}}$$

2. Proposer le système d'entraînement de la dernière articulation de façon à atteindre cet objectif. En particulier, la raideur doit satisfaire la relation suivante :

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_{\text{entraînement}}}{I_{\text{charge utile}}}} \quad ; \quad \text{donc } K = (2\pi f)^2\, I$$

3. Concevoir de manière similaire, l'une après l'autre, chaque articulation jusqu'à la base. Dans le principe, l'équation est toujours valable.

En fait, l'inertie varie pour chaque articulation correspondant à l'effet combiné de la charge utile et de tous les éléments du bras se trouvant en aval.

De même, le numérateur varie puisqu'il représente la raideur de l'articulation en cours de conception. Au début, il s'agit de celle qui est le plus près de la charge utile. A la fin, il s'agit de la partie solidaire de la base fixe, qui entraîne ce qu'il est convenu d'appeler la première articulation du robot.

CONCEPTION DE LA MECANIQUE D'UN BRAS

1. INTRODUCTION

Il existe peu de méthodes permettant de construire de façon systématique un bras de robot, ou de façon plus générale, une chaîne cinématique. Bien sûr, les cours traditionnels de construction et d'organes des machines sont utiles, mais il apparaît pour les articulations multiples réparties le long de chaînes cinématiques séquentielles (bras, jambes) un problème particulier.

Le problème, c'est qu'il est difficile voire impossible au-delà d'une certaine limite, d'augmenter simultanément précision et cadence de travail.

En effet, pour augmenter la précision, il faudrait des éléments très raides, des membres plus rigides et massifs. Alors qu'au contraire pour avoir des cadences élevées, il faudrait que les éléments en mouvement soient plus légers, ce qui implique des raideurs moindres.

La caractéristique technique essentielle que nous retenons ici pour guider la construction de la chaîne cinématique, c'est la fréquence propre. Ceci provient du fait qu'une relation existe entre cette caractéristique de fréquence et

- d'une part, les propriétés dynamique et de précision exigée par le cahier des charges,
- d'autre part les propriétés inertielles et de raideur pour la construction envisagée.

Notons qu'indispensable pour de bonnes performances simultanées en précision et en cadence de travail, une fréquence propre élevée ne suffit pas. De nombreux autres facteurs peuvent parfois ruiner ses effets: jeux[1], coincements[2], frottement[3] et broutage[4] (stick-slip), loi de commande[5], etc.

Voyons maintenant un à un divers termes dont on fera ensuite usage, dans le contexte d'une méthode développée vers 1980 à l'EPFL: raideur, masses, inerties, fréquence propre, et "facteur de qualité".

---

1 "Eliminer" les jeux par précontraintes

2 Eviter les hyperstatiques

3 Diminuer tant que possible le frottement (μ faible)

4 Garder μ0 < μ

5 Choisir une commande relativement douce (sans choc ni saccade); limiter l'erreur statique.

2. RAIDEUR EN MECANIQUE

La première caractéristique discutée ici, c'est la raideur. On l'associe typiquement à un ressort, mais en fait les éléments structurels des chaînes cinématiques travaillent en domaine élastique, et ils se comportent tous, dans une certaine mesure comme des ressorts.

La notion peut même prendre un sens pour les actionneurs (moteurs, vérins pneumatiques, etc.). Nous le verrons plus loin.

2.1 RAIDEUR LINEAIRE ET ANGULAIRE

La raideur, ou rigidité, c'est la caractéristique d'un élément qui se déforme peu sous l'effet de forces et de moments.

Raideur linéaire. Mathématiquement, la raideur linéaire est définie comme étant la dérivée de la force appliquée à un élément, évaluée par rapport à la déformation provoquée:

$K = dF/dx$; ou plus simplement, pour de petits accroissements, près de l'équilibre: $K = F/x$.

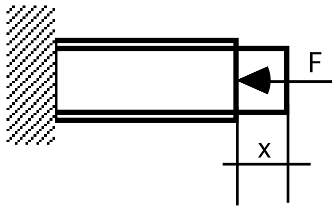


Fig. 4.2.1 La raideur linéaire caractérise le rapport entre force et déformation le long d'un axe

Raideur angulaire. La raideur angulaire est définie comme étant la dérivée du couple appliquée à un élément, évaluée par rapport à la déformation provoquée en rotation. On la désigne par K_α:

$K_\alpha = dC/d\alpha$;

ou plus simplement, pour de petits angles, près de l'équilibre:

$K_\alpha = C/\alpha$.

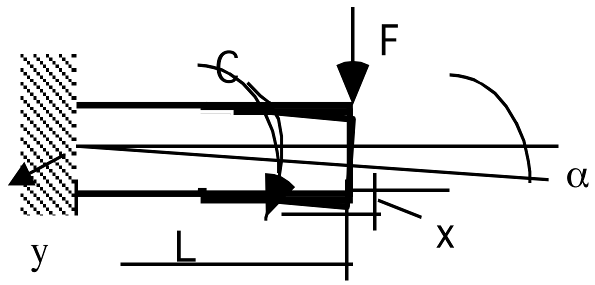


Fig. 4.2.2 La raideur angulaire caractérise le rapport entre moment et déformation autour d'un axe

Lors de l'évaluation des raideurs, il faut prendre garde à l'*axe* que l'on considère. Par exemple, pour le bloc de la figure ci-dessous, suivant que l'on analyse la raideur selon les axes x, y ou z, on n'obtiendra pas les mêmes valeurs.

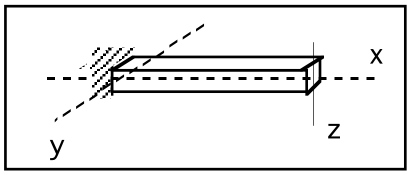
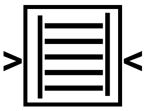


Fig. 4.2.3 La raideur varie suivant l'axe considéré

2.2MISE EN SERIE ET EN PARALLELE

Lorsque des éléments sont mis en *parallèle*, la raideur résultante est la *somme* des raideurs élémentaires:



$R_{éq.}=R_1+R_2+R_3...$

Lorsque des éléments sont mis en *série*, l'inverse de la raideur résultante est la *somme des inverses* des raideurs élémentaires.

>-----< $1/R_{éq.}=1/R_1+1/R_2+1/R_3...$

Il ressort en particulier des équations que dans une chaîne, la raideur globale ne peut que se dégrader lorsqu'on ajoute un élément. Cela signifie aussi que la raideur globale est toujours moins bonne que celle du plus mauvais des éléments.

2.3RAIDEUR DES MATERIAUX

La raideur d'un élément dépend de sa géométrie et du matériau qui le constitue. Comme cela a été vu en cours de "Résistance des matériaux", il existe toute une série de formules pour adapter la loi générale à toutes sortes de cas particuliers: barreaux, tores, etc.

La caractéristique du matériau qui nous intéresse ici en priorité, c'est E, le module d'élasticité (ou module de Young):

$\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E}$;où σ est la contrainte normale, et ε l'allongement relatif.

Quelques valeurs indicatives:

$E_{alu}= 0.75 \ 10^{11}$ Pascal

$E_{acier}= 2.1 \ 10^{11}$ Pascal

Pour plus de détails, il faut se référer au cours (ou à des livres) de résistance des matériaux.

2.4RAIDEUR DES ACTIONNEURS ET DES TRANSMISSIONS

La raideur des transmissions par éléments solides (câbles, barres, chaîne, pignons, etc.) peut s'estimer sur la base des définitions données en §2.3.

Une mention spéciale est faite ici pour les réducteurs harmoniques (harmonic drive). Dans ces mécanismes, de grands rapports de réduction sont possibles, de façon compacte, et avec des axes d'entrées et de sorties alignés.

$K_{\alpha} = 150\ 10^6\ D^3$ où D est le diamètre extérieur.

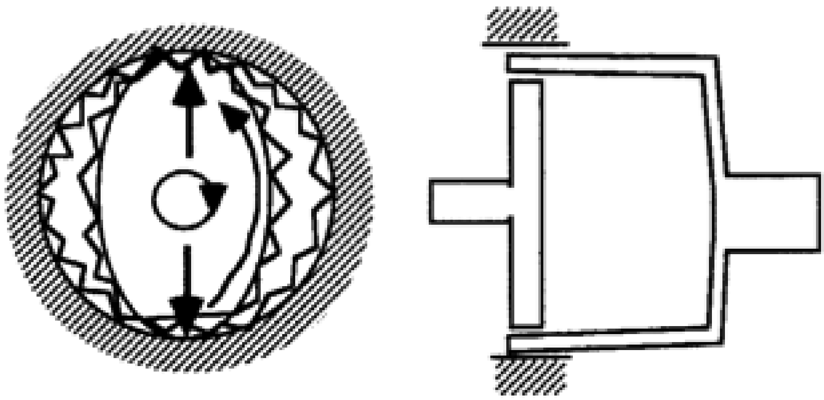
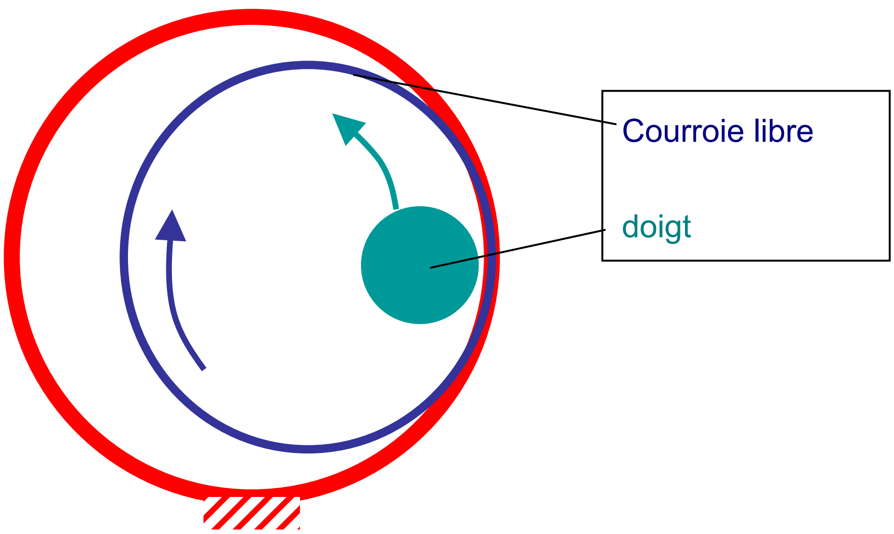


Fig. 4.2.4 Vue schématique d'un réducteur harmonique. Le bâtit extérieur est fixe. Au centre, un roulement à bille elliptique est entraîné par l'axe d'entrée. En tournant, il déplace le point d'appui entre bâti et cloche. La cloche est solidaire de l'axe de sortie; elle tourne "lentement" en sens inverse de l'axe d'entrée.



cf http://www.gammatic.com

Notons qu'en 2016, l'institut de recherche de Stanford (SRI) a inventé un nouveau réducteur, meilleur marché, susceptible de remplacer les réducteurs harmoniques dans la plupart des applications, « l'abacus drive » (cf. fig. et [SRI])

robotics news

IEEE SPECTRUM

25 October 2016

SRI Unveils Abacus Drive, the First New Rotary Transmission Design in 50 Years

Robot makers frequently use harmonic gears in their designs because they are compact, offer high gear ratios, and have no backlash. But harmonic gears are also expensive, significantly increasing the cost of robots. Now SRI International in Silicon Valley has demonstrated a novel kind of reduction gear system called the Abacus drive. SRI says it's the first new rotary transmission design since Harmonic Drive gears were introduced in the 1960s. It's a beautiful piece of clever engineering that promises all kinds of substantial advantages, including lower cost compared to conventional high-performance gears.

Parfois, la transmission d'énergie se fait non par des structures solides mais à travers des canalisations hydrauliques.

On a défini une constante liée à la compressibilité des liquides, B.
Par définition:

$$-\Delta V/V = \Delta\rho/\rho = \Delta P/B,$$

où V: volume; ρ: densité; P: pression.

La constante B se donne en unités de pression. Elle est très sensible au mélange d'air dans les tuyaux (B chute de 50% pour 1% d'air dans le liquide). Du point de vue pratique, c'est souvent moins la compressibilité du liquide que l'élasticité de l'*enveloppe* qui limite la raideur d'une transmission hydraulique.

Valeur typique pour un fluide hydraulique:

$$B = 1.3\ 10^9 \text{ Pascal}$$

Se basant sur la formule générale, on constate que la raideur peut se définir comme la force maximale, rapportée au plus petit déplacement possible.

Formule pour un vérin linéaire: $K=(4\ B\ s^2)/V_t$ [N/m] où s est la section et V_t le volume total d'huile.

Formule pour un vérin rotatif: $K_\alpha = (4\ B\ Cyr^2)/V_t$ [Nm/rad]

où $Cyr = l\ (R^2-r^2)/2$, où est l est l'épaisseur du cylindre, R le rayon extérieur et r le rayon intérieur.

Pour les actionneurs, s'il s'agit de vérins hydrauliques ou pneumatiques, les équations ci-dessus suffisent. Mais pour le cas des moteurs électriques, un complément est utile. Nous avons dans ce dernier cas l'équation suivante:

$$K_\alpha = C_{max}/p_{min}; \qquad \text{ou encore} \qquad K_\alpha = n\ C_{max}/2\pi;$$

où C_{max} est le couple maximal du moteur, et p_{min} est le plus petit pas possible du moteur (cas du moteur pas-à-pas) ou du capteur (cas du moteur à courant continu avec capteur angulaire à n positions).

3. MASSES ET INERTIES (RAPPEL)

La notion de "masse" des éléments mécaniques est bien connue. Les masses s'évaluent en kilogrammes (kg). Dans les équations relatives aux oscillations linéaires, la masse intervient comme telle.

Il est important ici de rappeler ce qui se passe en cas de rotation. Là ce sont les moments d'inertie qui interviennent. De nombreux moments ont été définis. Celui qui nous concerne ici, c'est le moment d'inertie, d'ordre 2, d'une masse par rapport à un axe.

Ainsi le moment d'inertie d'ordre 2, par rapport à un axe x, d'un élément comprenant n masses élémentaires m_i, est donné par la formule suivante:

$$J_x = \sum_{i}^{n} m_i y_i^2 \quad [\text{kg m}^2]$$

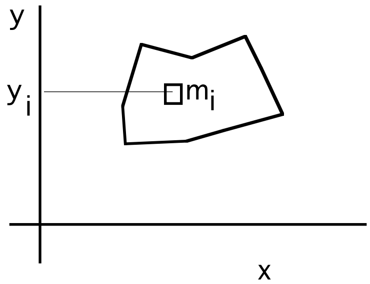


Fig. 4.2.5 Le moment d'inertie d'un élément dépend de sa masse et du carré de sa distance à l'axe considéré

Souvent, il suffit de modéliser un élément de forme compliquée (par ex. outil) par une masse ponctuelle se trouvant en son centre de gravité. Dès lors, l'intégrale fait place à une équation très simple:

$J = M d^2$ où d est la distance entre centre de masse et axe considéré.

4. FREQUENCE PROPRE

La fréquence propre dépend du système (masses, raideurs), de l'axe considéré (direction), ainsi que du type de mouvement analysé (translation ou rotation).

4.1 RELATION AVEC MASSES ET RAIDEURS

La fréquence propre s'évalue, pour le cas linéaire, par la formule suivante:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M}}$$

De même, dans le cas de rotations, une formule donne la fréquence propre angulaire:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_\alpha}{J}}$$

4.2CAS DES SYSTEMES COUPLES

Si une chaîne est conçue de façon systématique (“équilibrée”), chacun des éléments a la même fréquence propre, f. Dès lors, si plusieurs (n) éléments travaillent de façon couplée, la fréquence propre résultante du système, f_r est égale à:

$$f_r = \frac{1}{\sqrt{n}} f$$

En pratique on peut avoir jusqu'à trois éléments couplés (travail dans un même plan). On a donc dans le cas le plus défavorable:

$$f_r = \frac{1}{\sqrt{3}} f$$

Pendant une dizaine d’années, l’EPFL a proposé une construction équilibrée:

$$f = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\text{accélération}}{\text{erreur max. admissible}}}$$

Mais il apparaît maintenant que ce type d’approche présente l’inconvénient de provoquer des battements de très basse fréquence. Il vaut dès lors mieux, pour chaque “plan” où plusieurs articulations sont couplées, réaliser *une seule* articulation à la fréquence la plus basse possible:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\text{accélération}}{\text{erreur max. admissible}}}$$

Et pour les autres, il faut une fréquence suffisamment haute pour que son effet soit négligeable. Par exemple:

$$f = 3 \cdot \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\text{accélération}}{\text{erreur max. admissible}}}$$

4.3RELATION AVEC RAPIDITE ET PRECISION

Une relation existe entre fréquence propre et dépassement, dans le cas d'un mouvement réglé. A l'aide d'hypothèses simplificatrices[1], on peut utilement admettre que la relation entre dépassement et fréquence propre est la suivante:

---

1 Système à 1 ddl, conservatif càd sans frottement, subissant un saut unité avec un régulateur de type accélération constante (cf. réf. M.-O. Demaurex). De plus, on ne retient ici que la fréquence propre la plus basse, qui est la plus gênante en pratique, négligeant les harmoniques.

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a}{d}}$$

où a est l'accélération maximale considérée, pour une commande à accélération "constante"; et d est le dépassement maximal admissible, c'est-à-dire la précision exigée par le cahier des charges.

5. LOIS DE SIMILITUDE

Les lois de similitude sont intéressantes parce qu'elles font apparaître des changements *qualitatifs* dans les caractéristiques des systèmes lorsque l'échelle varie.

Elles permettent par exemple d'expliquer pourquoi les fourmis ont des pattes très fines par rapport au corps, alors qu'au contraire les pattes d'éléphants ou de rhinocéros sont très grandes.

Dans le cas d'un bras de robot, les lois de similitude indiquent en particulier que la fréquence propre augmente naturellement lorsque les dimensions diminuent.

Pour mettre en oeuvre les lois de similitude, il faut, dans chaque équation, faire apparaître explicitement les termes correspondant à une dimension linéaire. Il faut ensuite prendre le rapport de telles équations pour deux cas de grandeur différente.

Considérons deux systèmes barre-sphère de taille différente:

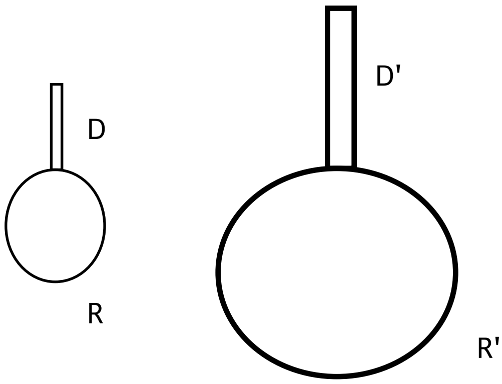


Fig. 4.2.6 Deux systèmes barre-sphère d'échelle différente.

Application des lois de similitude:

$$D^* = \frac{D'}{D}; \qquad R^* = \frac{R'}{R}$$

En appelant L* le facteur d'échelle, c'est-à-dire le rapport dimensionnel entre la taille du système de droite et celle du système de gauche, nous avons, de façon très simple:

$$D^*=R^*=L^*$$

De façon moins évidente, voyons ce qu'il en est pour la surface S d'une section transverse du cylindre, ainsi que pour le poids P de la sphère:

$$S = \frac{\pi D^2}{4}; \qquad P = \frac{4}{3}\pi R^2 \bullet \rho$$, où ρ est la densité (indice volumique de masse).

En conséquence:

$$S^* = \frac{S'}{S} = \frac{\frac{\pi D'^2}{4}}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{D'^2}{D^2} = D^{*2} = L^{*2} \quad \text{et} \quad P^* = \frac{P'}{P} = \frac{\frac{4\pi R'^3}{3} \bullet \rho}{\frac{4\pi R^3}{3} \bullet \rho} = \frac{R'^3}{R^3} = R^{*3} = L^{*3}$$

Appliquant cette méthode aux raideurs, masses, inerties et fréquences propres, il apparaît les lois de dépendance suivantes, relatives au rapport d'échelle:

$K^*=L^*$; $K_\alpha=L^{*3}$; $M^*=L^{*3}$; $J^*=L^{*5}$; et $f^*=L^{*-1}$

6. FACTEUR DE QUALITE

On l'a vu ci-dessus, un système peut être plus rapide ou plus précis si sa fréquence propre est plus élevée. Or on peut considérer la rapidité et la précision comme des caractéristiques souhaitables pour une chaîne cinématique.

Le problème, c'est que la fréquence propre tend à s'améliorer lorsqu'on diminue la taille de la chaîne, mais la grandeur de celle-ci est aussi une caractéristique souhaitable.

On a donc introduit un indicateur de qualité ("facteur de qualité"), Q, qui combine les deux propriétés:

$Q = f * L$ [m/s]

où f est la fréquence propre la plus basse du système, et L sa portée.

L'expérience montre qu'il est assez facile d'atteindre la valeur 30 pour le facteur de qualité. Pour atteindre des valeurs allant jusqu'à 50, il faut plus de soin dans la conception et la réalisation. Au delà de 50, il est pratiquement impossible d'aller.

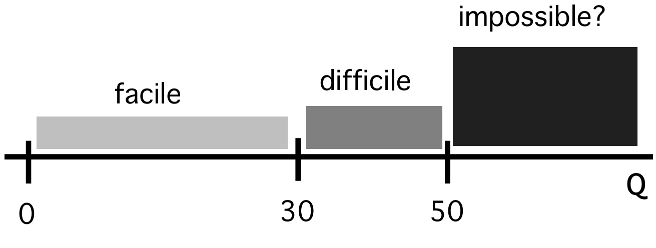


Fig. 4.2.7 Il est pratiquement impossible d'obtenir un facteur de qualité supérieur à 50.

Curieusement, il est plus simple de quantifier précisément la fréquence propre d'une chaîne cinématique que sa portée. Il faut donc considérer ici les résultats de façon critique, et se satisfaire d'estimation à 10 ou 20% près...

7. APPROCHE SYSTEMATIQUE POUR LA CONCEPTION D'UN BRAS

Une méthode a été proposée par l'Institut de microtechnique de l'EPFL (C.W. Burckhardt, M.-O. Demaurex, et d'autres) au début des années 80. L'essentiel tient en trois points :

1. Classiquement, il faut d'abord établir le cahier des charges pour l'application[1]: il faut en particulier, pour une chaîne cinématique, déterminer les éléments suivants: charge utile, précision (*erreur maximale admissible*) et caractéristiques dynamiques (vitesse maximum et surtout *accélération*). La portée est aussi nécessaire pour estimer le facteur de qualité.

   Il en découle en particulier la fréquence propre f_i à viser pour chaque élément i, telle que définie ci-dessus aux §4.2 et 4.3:

   $$f_i = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a}{d}} \qquad \text{ou} \qquad f_i = n_i \bullet \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a}{d}}$$

2. Proposer le système d'entraînement de la *dernière* articulation de façon à atteindre cet objectif. On adopte la même convention de numérotation que pour la méthode Denavit-Hartenberg; il s'agit donc ici de l'articulation la plus éloignée de la base.

   En particulier, la raideur doit satisfaire l'une ou l'autre des relations suivantes :

   $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M}}$; donc $K = (2\pi f)^2 M$ (cas d'une articulation prismatique)

   ou $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_\alpha}{J}}$; donc $K_\alpha = (2\pi f)^2 J$ (cas d'une articulation rotative)

   Le terme J correspondant à la charge utile du cahier des charges (masse) multipliée par un certain "bras de levier" défini entre axe de rotation et centre de charge.

3. Concevoir de manière similaire, l'une après l'autre, chaque articulation jusqu'à la base.

---

1 Pour cela, la méthode IBM présentée dans la partie 4.1 du cours est bien sûr utile.

Dans le principe, les équations sont toujours valables. Mais du point de vue numérique, l'inertie varie pour chaque articulation amont, à cause de l'effet combiné de la charge utile et de tous les éléments du bras se trouvant en aval, et dont la conception est progressivement détaillée.

De même, le numérateur varie puisqu'il représente la raideur de l'articulation en cours de conception. Au début, il s'agit de celle qui est le plus près de la charge utile. A la fin, il s'agit de la partie solidaire de la base fixe, qui entraîne ce qu'il est convenu d'appeler la première articulation du robot, ainsi que tout le reste de la chaîne qui lui est attaché.

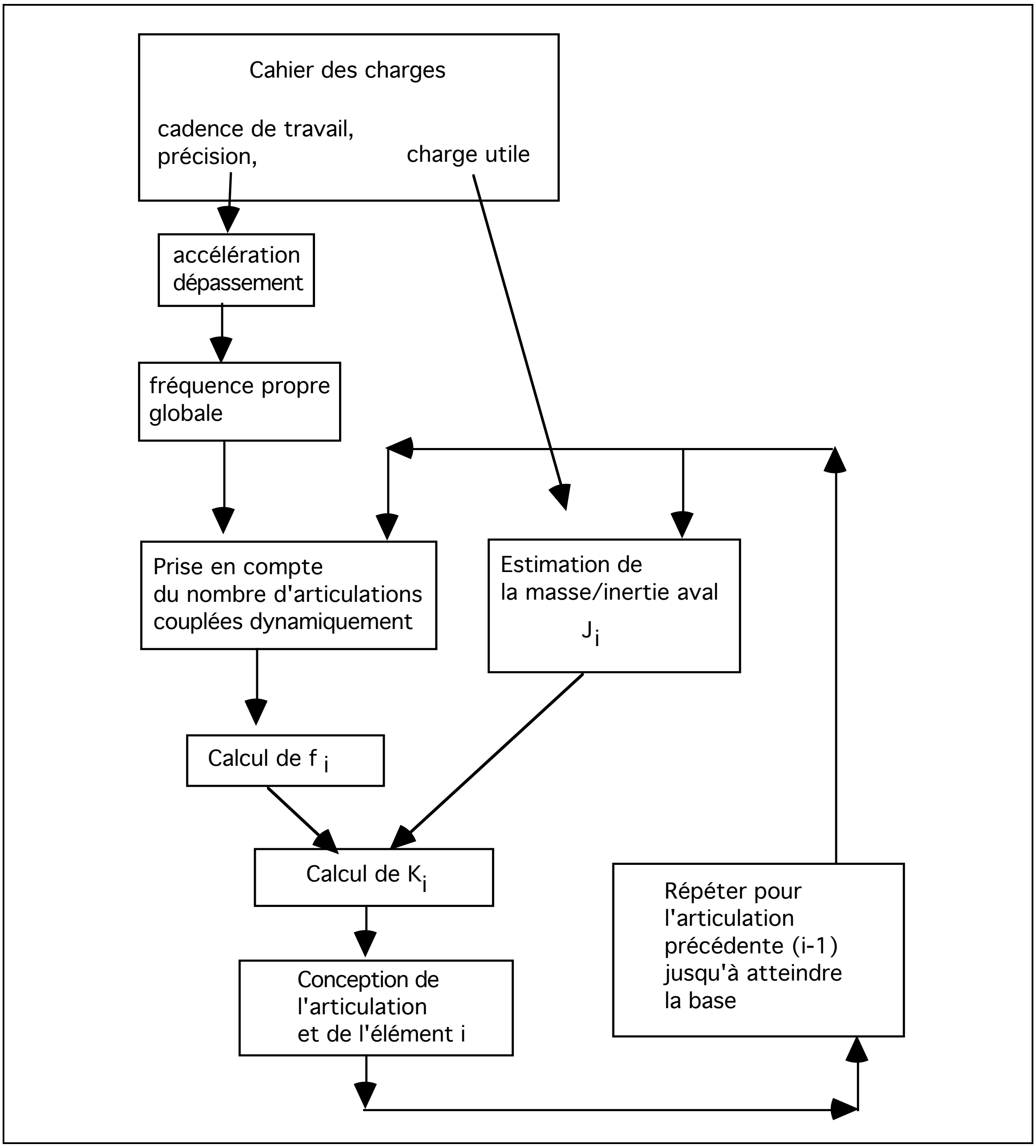


Fig. 4.2.8 Représentation schématique du processus de conception de la chaîne. Initialement, l'indice i désigne l'élément le plus éloigné de la base.

8. CONCLUSION

La méthode de construction d'une chaîne cinématique présentée ici est valable. Elle s'avère particulièrement utile pour la conception de bras et de jambes (cas des robots mobiles).

La méthode présente un intérêt particulier pour évaluer une construction avant sa réalisation, et pour ce qui concerne le régime *dynamique*.

Il faut bien sûr également considérer les contraintes *statiques* (force/couple maximal, limites de rupture, etc.) mais cela est plus facile et les méthodes traditionnelles en construction sont tout à fait adaptées pour cela.

Certains rêvent toujours de réaliser un robot qui soit à la fois précis, rapide et pourtant peu rigide. Il est vrai que dans certains cas simples, des performances remarquables sont possibles (cf. mouvement de ponts suspendus, paradoxe du grutier). Mais vu le nombre élevé de degrés de liberté composant un bras de robot, qui plus est avec couplages mutuels, variations de géométrie ainsi que, par ailleurs, une charge utile variant au cours du temps, il paraît bien illusoire d'échapper aux contraintes énoncées et sur lesquelles reposent la présente méthode.

REFERENCES

[CLA] R. Clavel, "La Construction d'un Bras de Robot Industriel", Polycopié de cours, EPFL, 1987.

[MAK] Makino, N. Furuya, "Scara robot and its family", Proc. of the 3rd Int. Conf. on assembly automation, Boblingen, Deutschland, mai 1982, pp 433 - 444.

[WHI] D.E. Whitney, , "Quasi-static assembly of compliantly supported rigid parts", J. Dynamic Syst., Meas., Contr., vol. 104, no 1, pp 65-77, March 1982.

[DEM] M.-O. Demaurex, Approche théorique de la conseption de la structure mécanique d'un robot industriel", Thèse No 322 (1979), EPFL.

[AND] P. André, J,-M, Kaufmann, F. Lhote et J.-P. Taillard, "Constituants technologiques", Série "Les Robots" tome 4, Hermès Publ., Paris, 1983.

[SRI] IEEE Spectrum, « SRI Abacus Drive », Octobre 26, 2016.